

组合数学中的一类计数问题

谭中华

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510090)

摘要: 利用求生成函数的方法解决了量子计算中的一类计数问题, 并由此问题转化和推广得到了 k 种不同颜色的球各 n 个, 且同色球完全相同, 从中任选 n 球放入 m 个有标号的盒子型的方法数.

关键词: 组合; 量子计算; 生成函数

中图分类号: O157

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2005)0-0117-03

1 问题的引入

量子计算最近十几年来发展迅速, 因其与量子计算机和量子通讯关系密切而倍受科学界的关注, 量子计算目前已成为国际学术研究的一大热点^[1]. 本文由解决式(*)的展开式中含 $p^{\frac{k}{2}}$ 的项的个数是多少及含 $p^{\frac{m}{2}}$ 的各项系数的平方和是多少的问题入手, 给出了其中的证明, 同时进行了数学推广.

$$\prod_{i=1}^m \sum_{n=0}^{\infty} p^{\frac{m}{2}} \frac{\sum_{k=0}^n C_n^k f(n, k) r_i^{n-k} l_i^k}{n!}, \quad (*)$$

式中, $f(n, k) = \begin{cases} 1 & n=0, \\ \sqrt{n} & n=k \neq 0, \\ \sqrt{n} & n \neq 0, k=0, \\ \sqrt{k(n-k)} & \text{其它}. \end{cases}$

2 问题的解决

引理 1 $\sum_{i=1}^{n-1} (C_n^i)^2 i! (n-i) = C_{2n-2}^n$ (这里 $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, 下同)

证明 由 $(1+x)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i$ 得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=1}^n i C_n^i x^{i-1}, \quad (1)$$

又 $(1+x)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i}$, 得

收稿日期: 2004-06-14

作者简介: 谭中华(1970), 男, 讲师, 主要研究方向为组合计数、图论.

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=1}^n (n-i) C_n^i x^{n-i-1}. \quad (2)$$

由式(1)、(2)知 $n^2(1+x)^{2n-2} = \sum_{i=1}^n i C_n^i x^{i-1} \cdot \sum_{i=1}^n (n-i) C_n^i x^{n-i}$, 比较两边 x^{n-2} 的系数得

$$\sum_{i=1}^{n-1} (C_n^i)^2 i(n-i) = C_{2n-2}^n.$$

引理 2^[2] n 个完全相同的球, 放入 m 个标号的盒子里(其中某些可能为空)的方法数是 C_{m+n-1}^n .

$$\text{引理 3 } \sum_{i=0}^n C_{k+i-1}^i C_{m+n-i-1}^{n-i} = C_{k+m+n-1}^n.$$

$$\text{证明 因 } (1-x)^{-k} \sum_{i=0}^{\infty} C_{k+i-1}^i x^i \text{ 和 } (1-x)^{-m} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{m+i-1}^i x^i \text{ 及}$$

$$(1-x)^{-(k+m)} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{k+m+i-1}^i x^i \text{ 知}$$

$$(1-x)^{-(k+m)} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{k+i-1}^i x^i \sum_{j=0}^{\infty} C_{m+j-1}^j x^j.$$

比较两端 C^n 的系数, 就得到引理 3 成立.

首先计算含 $p^{\frac{k}{2}}$ 的项的个数为 C_{2m+k-1}^k .

证明 不妨把第 1 个因式看作是标号为 1 的盒子, 第 2 个因式看作是标号 2 的盒子, ..., 第 m 个因式看作是标号 m 的盒子. 要求得到含 $p^{\frac{k}{2}}$ 的项的个数相当于 k 个完全相同的球, 放入 m 个标号的盒子里(其中某些可能为空). 亦即在第 i 个盒子中放入 j 个球, 相当于第 i 个因式中取 $p^{\frac{j}{2}}$ 那一项, 其项数共有项 $j+1$. 设 u_i 表示第 i 个盒子中的球数($j=1, 2, \dots, n$), 且 $u_1 + u_2 + \dots + u_m = k$. 则含 $p^{\frac{k}{2}}$ 的项的个数为 $(u_1+1) + (u_2+1) + \dots + (u_m+1)$ ^[3], 故含 $p^{\frac{k}{2}}$ 的项的个数为

$$\sum_{\substack{u_1, u_2, \dots, u_m \geq 0 \\ u_1 + u_2 + \dots + u_m = k}} (u_1+1) + (u_2+1) + \dots + (u_m+1).$$

显然和数等于在 $(1+2x+3x^2+4x^3+\dots)^m = (1-x)^{-2m}$ 的展开式 x^k 项的系数. 而 $(1-x)^{-2m}$ 展开式 x^k 项的系数为 C_{2m+k-1}^k .

接着计算各个因式含 $p^{\frac{i}{2}}$ 项中各系数的平方和, 由引理 1 易知含 $p^{\frac{i}{2}}$ 项中各系数的平方和为 $(n^2 C_{2n-2}^n + 2n)/(n!)^2$.

故含 $p^{\frac{m}{2}}$ 的各项系数的平方的和是等于在 $(1+2x+(2^2 C_2^2 + 2 \times 2)/(2!)^2 x^2 + \dots + (n^2 C_{2n-2}^n + 2n)/(n!)^2 x^n + \dots)^m$ 展开式中 x^m 的系数. 由于此生成函数比较复杂, 还有待于解决. 下面主要由此问题入手来解决组合数学的一类计数问题.

3 主要结果

定理 1 现从 n 个完全相同的红球和 n 个完全相同的白球中任选 n 个球放入 m 个有标号的盒子里不同的方法数是 C_{2m+n-1}^n .

证明 显然若在第 i 个盒子中放入 j 个球则不同的方法数为 $j+1$, 这就等同于上面计算含

$p^{\frac{m}{2}}$ 的项的个数.

定理2 现有红球、白球、绿球各 n 个, 且同色球完全相同, 从中任选 n 球放入 m 个有标号的盒子里不同的方法数是 C_{3m+n-1}^n .

证明 容易计算若在第 i 个盒子中放入 j 个球则不同的方法数为 $(j+1)(j+2)/2$, 设 u_i 表示第 i 个盒子中的球数 ($i=1, 2, \dots, n$), 且 $u_1+u_2+\dots+u_m=n$, 则不同的方法数为

$$\sum_{\substack{u_1, u_2, \dots, u_m \geq 0 \\ u_1+u_2+\dots+u_m=n}} (u_1+1)(u_1+2)(u_2+1)(u_2+2)\dots(u_m+1)(u_m+2)/2^m,$$

其和数等于 $((1 \times 2)/2 + (2 \times 3)/2 + \dots + (n+1)(n+2)/2)x^n + \dots)^m = (1-x)^{-3m}$ 展开式中 x^n 项的系数. 而 $(1-x)^{-3m}$ 展开式 x^n 项的系数为 C_{3m+n-1}^n , 故得证.

定理3 若有 k 种不同颜色的球各 n 个, 且同色球完全相同, 从中任选 n 球放入 m 个有标号的盒子里不同的方法数是 C_{km+n-1}^n .

证明 用数学归纳法证明. 当 $k=1$ 时, 就是引理1. $k=2$ 或 3 时, 就是定理1、2. 若 $k-1$ 时, 定理3成立. 下证 k 成立.

把 n 个球(不妨设其中有 $i(0 \leq i \leq n)$ 个第 k 种颜色的球, $n-i$ 个另外 $k-1$ 种颜色的球)放入 m 个有标号的盒子里, 可以分成两个阶段进行.

第一个阶段把 i 个第 k 种颜色的球放入 m 个有标号的盒子里, 由引理2知有不同的方法数 C_{im+n-1}^i ;

第二个阶段把 $n-i$ 个另外 $k-1$ 种颜色的球放入 m 个有标号的盒子里, 由假设知其不同的方法数为 $C_{(k-1)m+n-i-1}^{n-i}$. 所以不同的方法数为 $\sum_{i=0}^n C_{im+n-1}^i \cdot C_{(k-1)m+n-i-1}^{n-i}$.

$$\text{由引理3知, } \sum_{i=0}^n C_{im+n-1}^i \cdot C_{(k-1)m+n-i-1}^{n-i} = C_{km+n-1}^n.$$

故定理3成立.

参考文献:

- [1] 高山珍, 高静伟. 量子计算中的六个恒等式的证明[J]. 石河子大学学报, 2004, (1): 77-79.
- [2] DANIEL I A COHEN 著. 组合理论的基本方法[M]. 左孝凌等译. 北京: 北京大学出版社, 1989.
- [3] Berge C. Principles of Combinatorics[M]. New York: Academic Press, 1971.

A Kind of Enumerative Problems in Combinatorial Mathematics

TAN Zhong-hua

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract: By the way of generating function, some enumerative problems in quantum computation are solved, and on the basis of the methods, the result is extended: There are kn balls with k different colors and the number of balls, each with same color, equals to n (balls of the same color are indistinguishable). N balls are chosen from the kn balls arbitrarily and distributed into m labeled boxes. The distributions are gotten.

Key words: combination; quantum computation; generating function